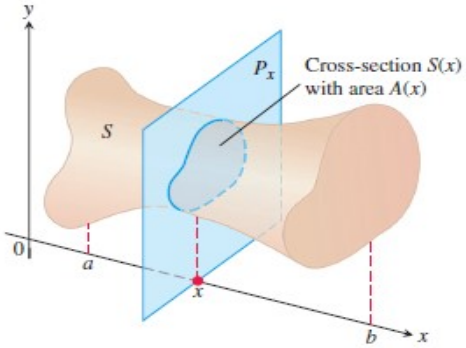
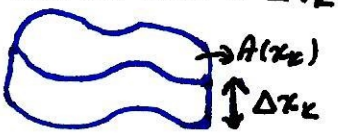
6 BELİRLİ İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

6.1 Dilimleyerek Hacim Bulma ve Dönel Cisimlerin Hacimleri



$[a,b]$ aralığında, şekildeki gibi bir S katı cisminin her x noktasında kesit alanı $A(x)$ ve A, x'in sürekli fonksiyonu ise katı S cisminin hacmini, belirli integral olarak aşağıdaki yolla hesaplarız.

$[a,b]$'nin bir parçalanışı $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ olsun. k. alt aralıktaki silindirik katı cismin hacmi $\Delta V_k = A(x_k)\Delta x_k$ dır.

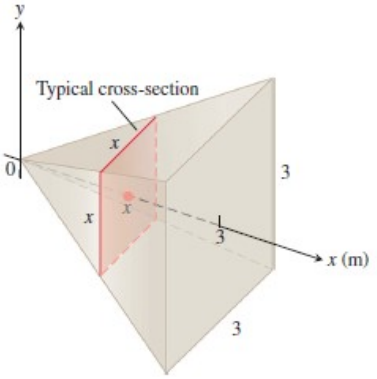


$\|P\|\to 0$ için $\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k$ limiti alınırsa $\int_a^b A(x)dx$ elde edilir.

Tanım: $x=a$'dan $x=b$'ye integrallenebilir $A(x)$ kesit alanı bilinen bir katı cismin hacmi, a'dan b'ye A'nın integralidir,

$$V=H=\int_a^b A(x)dx.$$

Örnek 1: Bir kenarının uzunluğu 3 m olan, kare tabana sahip bir piramidin yüksekliği 3m dir. Piramidin hacmini bulunuz.

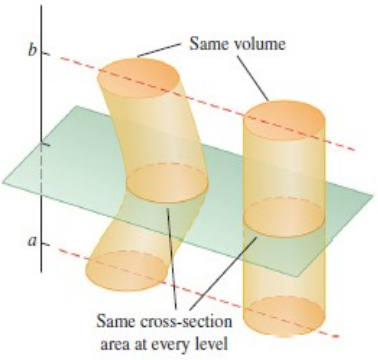


x-eksenini piramidin merkezinden geçirdiğimizde, üst kenar doğrusunun denklemi $y=\frac{x}{2}$ dır. $[0,3]$ aralığındaki herhangi bir x noktasında kesit bölgesinin alanı $A(x)=x^2$ dir.

Buna göre hacim,

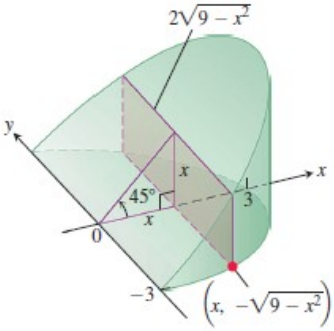
$$H=\int_0^3 A(x)dx=\int_0^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=9\ m^3.$$

Örnek 2: Cavalieri Prensibi



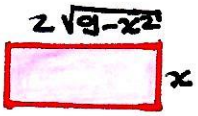
Cavalieri prensibi, yüksekllikleri aynı ve her yüksekliktaki (noktadaki) kesit alanları aynı olan iki katı cismin hacimleri de aynı olduğunu söyler.

Örnek 3: Yarıçapı 3 olan bir silindir, önce silindir merkezine dik bir düzlem tarafından kesiliyor. Daha sonra, birinci düzlemle 45° açı yapan ve silindir merkezinden geçen, ikinci bir düzlem ile kesiliyor. Elde edilen kamanın hacmini bulunuz.



x-eksenine dik bir kesit bölgesinin alanı

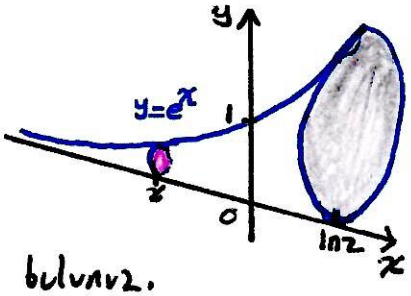
$$A(x) = x \cdot \left(2\sqrt{9-x^2}\right)$$
$$= 2x\sqrt{9-x^2}$$



Hacim $\quad H = \int_a^b A(x)dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx \quad \begin{bmatrix} u = 9-x^2 \\ du = -2x\,dx \end{bmatrix} = \int_9^0 \sqrt{u}\,(-du)$ dır.

$$= \int_0^9 u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^9 = 18 \text{ br}^3.$$

Örnek 4: Şekildeki gibi katı bir boynuzun x-eksenine dik kesit alanı, çapı x-ekseni ile $y=e^x$ eğrisi arasındaki uzaklık olan çembersel disktir. $-\infty < x \leq \ln 2$ aralığında boynuzun hacmini bulunuz.



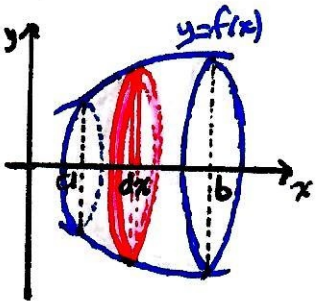
Kesit alanı $\quad A(x) = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{\pi}{4}e^{2x}$ dır.

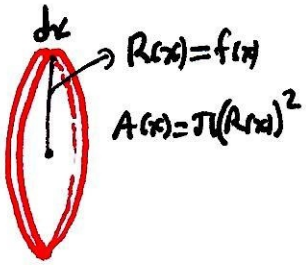
Hacim $\quad H = \int_{-\infty}^{\ln 2} A(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{\ln 2}\frac{\pi}{4}e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{\pi}{8}e^{2x}\Big|_a^{\ln 2} = \lim_{a\to-\infty}\frac{\pi}{8}(4-e^{2a})$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ br}^3.$$

Dönel Cisimlerin Hacimleri: Disk Yöntemi

Bir düzlem bölgesinin, düzleminde bulunan bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen katı cisme bir <u>dönel cisim</u> denir. Bu cismin hacmini bulmak için, kesit alanı $A(x)$'in yarıçapı $R(x)$ olan bir diskin alanı olduğunu görmek yeterlidir.



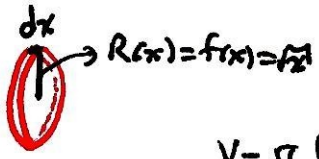


$$dV = A(x)\,dx = \pi R^2(x)\,dx$$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b R^2(x)\,dx}$$

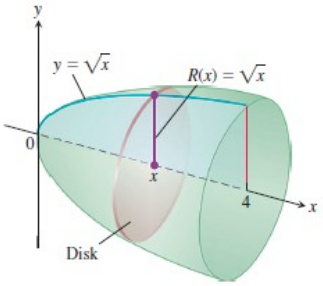
Dönel cismin hacmini hesaplamanın bu yöntemine, <u>disk yöntemi</u> denir.

Örnek 1: $0 \le x \le 4$ aralığında $y=\sqrt{x}$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

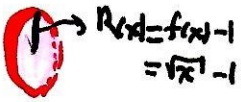


$$dV = \pi R^2(x)\,dx$$

$$V = \pi \int_0^4 R^2(x)\,dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\,dx = \pi \int_0^4 x\,dx = 8\pi \text{ br}^3$$



Örnek 2: $y=\sqrt{x}$ eğrisi, $y=1$ ve $x=4$ doğruları arasında kalan bölgenin $y=1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

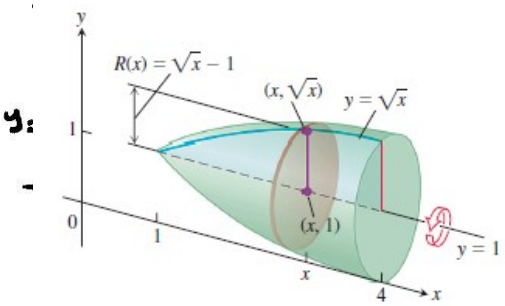


$$dV = \pi R^2(x)\,dx$$

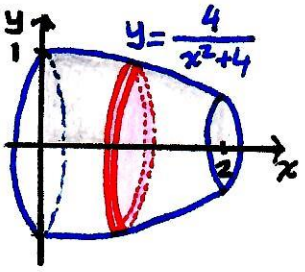
$$= \pi (\sqrt{x}-1)^2\,dx$$

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x}-1)^2\,dx = \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1)\,dx$$

$$= \frac{7\pi}{6} \text{ br}^3.$$



Örnek 3: $y=\frac{4}{x^2+4}$ eğrisi, x-ekseni ve $x=0$ ile $x=2$ doğruları ile sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



$R(x)=\frac{4}{x^2+4}$

$dV=\pi R^2(x)\,dx$
$=\pi\left(\frac{4}{x^2+4}\right)^2dx$

$$V=\int_0^2 dV=\pi\int_0^2\left(\frac{4}{x^2+4}\right)^2dx$$

$$=16\pi\int_0^2\frac{1}{(x^2+4)^2}dx\quad\left[\begin{array}{l}x=2\tan\theta\\ dx=2\sec^2\theta\,d\theta\end{array}\right]$$

$$V=16\pi\int_0^{\pi/4}\frac{2\sec^2\theta}{(4\sec^2\theta)^2}d\theta=2\pi\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta=2\pi\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\pi\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

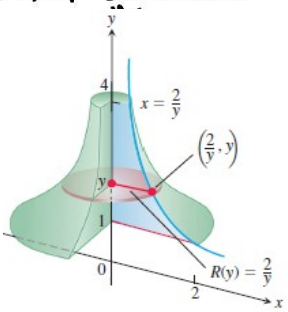
$$=\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\text{ br}^3.$$

Bir $x=R(y)$, $c\le y\le d$ eğrisi ve y-ekseni arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulmak için, x yerine y koyarak aynı yöntemi kullanabiliriz. Bu durumda, çembersel kesit alan

$$A(y)=\pi\,[R(y)]^2$$

dir.

Örnek 4: $x=\frac{2}{y}$, $1\le y\le 4$ eğrisi ve y-ekseni arasındaki bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



$R(y)=\frac{2}{y}$

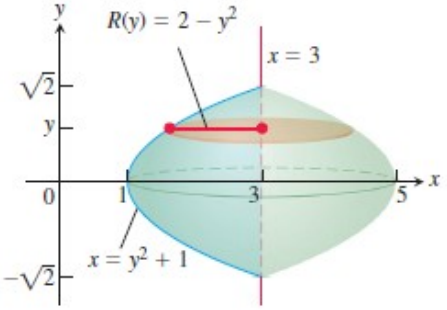
$A(y)=\pi[R(y)]^2$
$=\pi\left(\frac{2}{y}\right)^2$

$$dV=A(y)\,dy=\pi\left(\frac{2}{y}\right)^2dy$$

$$V=\int_1^4 dV=\int_1^4\pi\left(\frac{2}{y}\right)^2dy=\pi\int_1^4\frac{4}{y^2}dy$$

$$=4\pi\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_1^4=3\pi\text{ br}^3.$$

Örnek 5: $x=y^2+1$ parabolü ve $x=3$ doğrusu arasında kalan kapalı bölgenin $x=3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



$R(y)=3-(y^2+1)$

$A(y)=\pi[R(y)]^2$
$=\pi(2-y^2)^2$

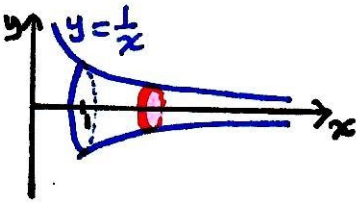
$$dV=\pi(2-y^2)^2dy$$

$$V=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2-y^2)^2dy$$

$$=\pi\left(4y-\frac{4}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{64\pi\sqrt{2}}{15}\text{ br}^3.$$

Örnek 6: $1 \le x < \infty$ aralığında $y=\frac{1}{x}$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölgenin, x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



$R(x)=\frac{1}{x}$

$A(x)=\pi\left(\frac{1}{x}\right)^2$

$dV = A(x)dx = \pi \frac{1}{x^2}dx$

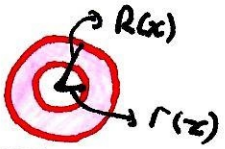
$V=\pi\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \pi \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx$

$=\pi \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \pi \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=\pi \text{ br}^3$

Bölgenin alanı?

Pul (washer) Yöntemi

Bir katı cismi oluştururken döndürülen bölge, döndürme eksenine sınır değilse, katı cisim bir delik içerir. Döndürme eksenine dik kesit alanı, disk yerine pul şeklindedir.



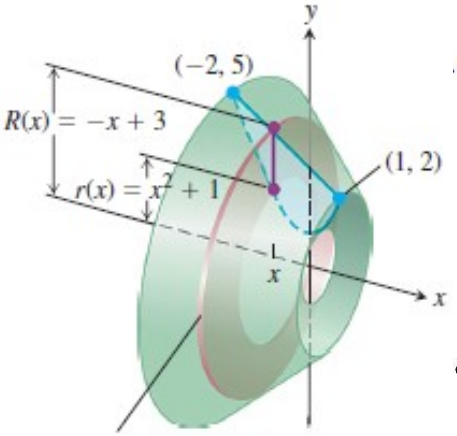
Pulun alanı $A(x)=\pi R^2(x)-\pi r^2(x) = \pi[R^2(x)-r^2(x)]$ dir.

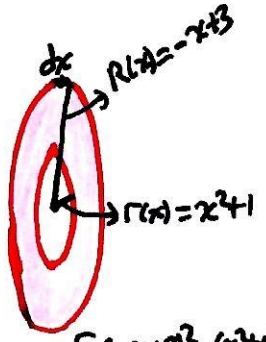
Dolayısıyla hacim

$$\boxed{V=H=\int_a^b A(x)dx = \pi\int_a^b \left([R(x)]^2-[r(x)]^2\right)dx}$$

dir.

Örnek 1: $y=x^2+1$ eğrisi ve $y=-x+3$ doğrusu arasında kalan kapalı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.





$A(x)=\pi[(-x+3)^2-(x^2+1)^2]$

İki eğrinin kesişim noktaları

$x^2+1=-x+3 \Rightarrow x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2,\ x=1.$

$dV=A(x)\,dx$

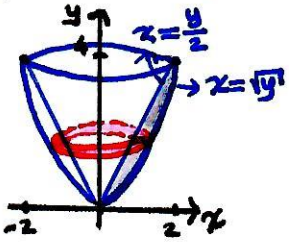
$=\pi[(-x+3)^2-(x^2+1)^2]dx$

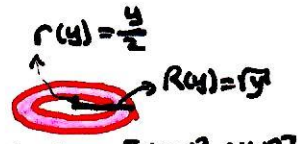
$=\pi(-x^4-x^2-6x+8)dx$

Hacim $= H = V = \int_{-2}^{1} dV = \int_{-2}^{1} A(x)dx$

$=\pi\int_{-2}^{1}(-x^4-x^2-6x+8)dx = \frac{117\pi}{5}$

Örnek 2: $y=x^2$ parabolü ve $y=2x$ doğruları arasında kalan kapalı bölgenin, y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.





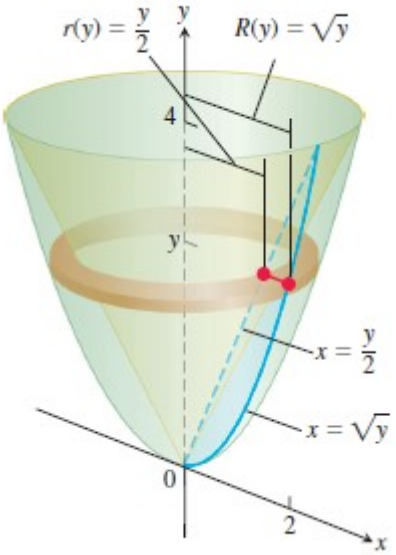
$A(y)=\pi\left[(\sqrt{y})^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]$

$dV=A(y)\,dy=\pi\left(y-\frac{y^2}{4}\right)dy$

$V=\pi\int_0^4\left(y-\frac{y^2}{4}\right)dy=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12}\right)\Big|_0^4$

$=\frac{8\pi}{3}\ br^3.$

$\left(\frac{y}{2}=\sqrt{y}\Rightarrow\frac{y^2}{4}=y\Rightarrow y\left(\frac{y}{4}-1\right)=0\Rightarrow y=0,\ y=4\right)$

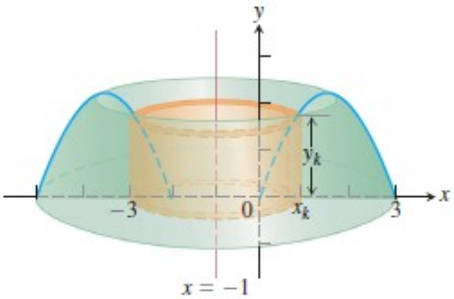


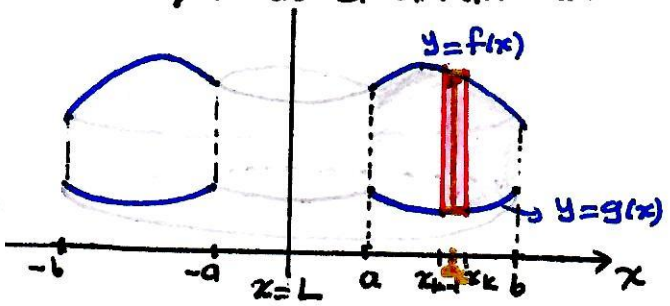
(b)

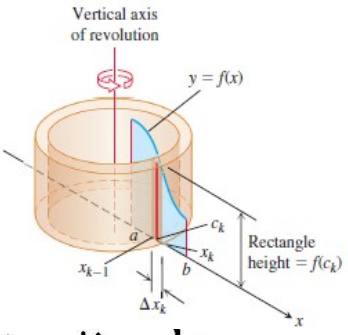
6.2 Kabuk Yöntemi

Döndürme ekseni, integrasyon sınırını içeren eksene dik olduğu zaman dönel cismin hacmini bulmak için bir diğer yöntem kabuk yöntemidir.

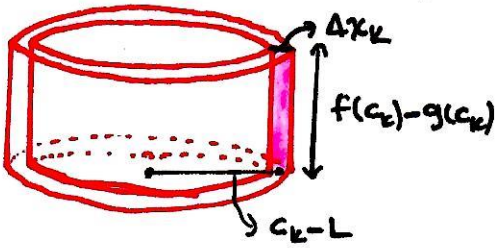
Sonlu $[a,b]$ kapalı aralığında, $0 \leq g(x) < f(x)$ şartını sağlayan sürekli fonksiyonlar ile sınırlı bölgenin, $x=L \leq a$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini araştıralım!

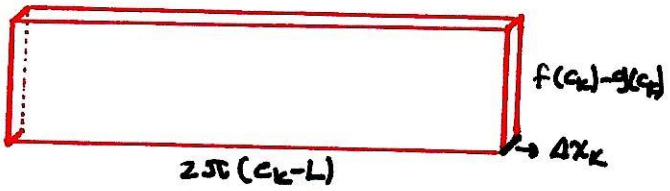






$[a,b]$ aralığının bir parçalanışı $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$, k. altaralığın orta noktası c_k olsun. Bu parçalanışta tipik dikdörtgenin yüksekliği $f(c_k)-g(c_k)$ ve genişliği $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dir. Bu dikdörtgeni $x=L$ doğrusu etrafında döndürürsek, elde edilen kabuğun hacmi:





$\Delta V_k = 2\pi \times$ kabuğun yarıçapı $\times$ kabuğun yüksekliği $\times$ kabuğun kalınlığı,

$$= 2\pi \cdot (c_k - L) \cdot (f(c_k) - g(c_k)) \cdot \Delta x_k .$$

$\|P\| \to 0$ için Riemann toplamı $\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$ 'nın limiti, katı cismin belirli integral olarak hacmini verecektir.

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \int_a^b 2\pi \times (\text{kabuğun yarıçapı}) \times (\text{kabuğun yüksekliği})\, dx$$

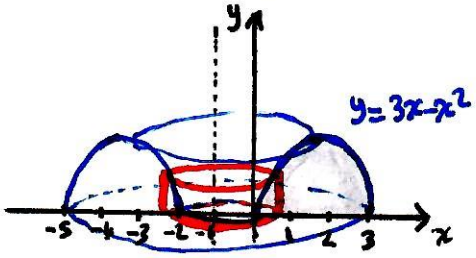
$$= \int_a^b 2\pi (x-L)(f(x)-g(x))\, dx .$$

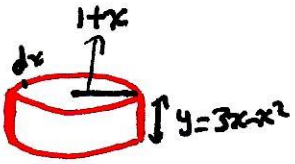
Kabuk Formülü: $[a,b]$ aralığında bir bölgenin $x=L$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yarıçapı}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yüksekliği}\end{pmatrix} dx$$

dir.

Örnek 1: $y=f(x)=3x-x^2$ parabolü ve x-ekseni arasında kalan kapalı bölgenin $x=-1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



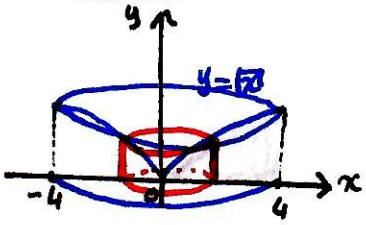


$$dV=2\pi(1+x)\,y\,dx$$
$$=2\pi(1+x)(3x-x^2)\,dx$$

$$V=2\pi\int_0^3(1+x)(3x-x^2)\,dx$$

$$V=H=2\pi\int_0^3(2x^2+3x-x^3)\,dx=2\pi\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^3=\frac{45\pi}{2}\ br^3.$$

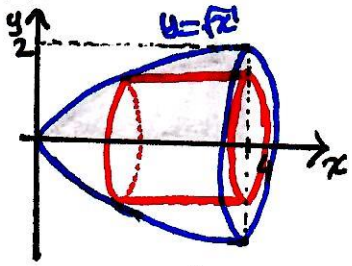
Örnek 2: $y=\sqrt{x}$ eğrisi, x-ekseni ve $x=4$ doğruları arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

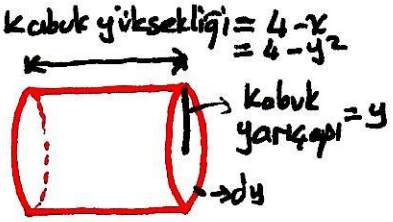


$$dV=2\pi x\,y\,dx=2\pi x\sqrt{x}\,dx$$

$$V=2\pi\int_0^4\begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yarıçapı}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yüksekliği}\end{pmatrix}dx$$
$$=2\pi\int_0^4 x\sqrt{x}\,dx=2\pi\,\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^4$$
$$=\frac{128\pi}{5}\ br^3.$$

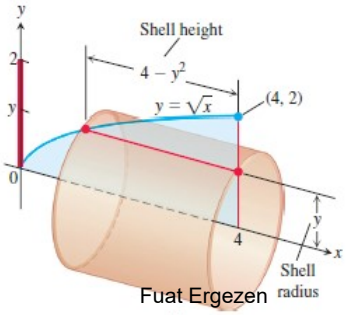
Örnek 3: $y=\sqrt{x}$ eğrisi, x-ekseni ve $x=4$ doğruları arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



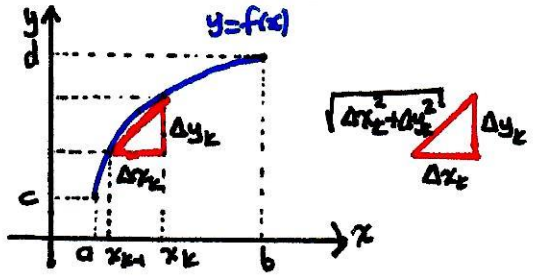


$$dV=2\pi\begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yarıçapı}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yüksekliği}\end{pmatrix}dy$$
$$=2\pi\,y(4-x)\,dy$$
$$=2\pi\,y(4-y^2)\,dy$$

$$H=2\pi\int_0^2 y(4-y^2)\,dy=2\pi\int_0^2(4y-y^3)\,dy=2\pi\left(2y^2-\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2=8\pi\ br^3.$$



6.3 Düzlem Eğrilerin Uzunluğu



Birinci türevi sürekli olan fonksiyona <u>düzgün</u> (smooth) denir.

$y=f(x)$ $[a,b]$ $([c,d])$ aralığında düzgün fonksiyon olsun. $[a,b]$'nin bir parçalanışı $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ olsun. k. alt-aralık $[x_{k-1},x_k]$'da fonksiyonun yaklaşık uzunluğu $\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$ dir. Her alt-aralıkta Ortalama Değer Teoremini uygular ve Rieman toplamını yazarsak

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+(f'(c_k))^2}\,\Delta x_k$$

elde ederiz. $\|P\|\to 0$ için Riemann toplamının limitini alırsak:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

formülünü elde ederiz. x, y'nin bir fonksiyonu ise $x=g(y)$ ve $[c,d]$ aralığında düzgün ise bu formülü $\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k}\right)^2+1}\,\Delta y_k$

$$\Rightarrow \quad L=\int_c^d\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

şeklinde de yazabiliriz.

Düzgün Bir Eğrinin Uzunluk Formülü: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında düzgün ise a'dan b'ye $y=f(x)$ eğrisinin uzunluğu

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

sayısıdır. g fonksiyonu $[c,d]$ aralığında düzgün ise c'den d'ye $x=g(y)$ eğrisinin uzunluğu

$$L=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

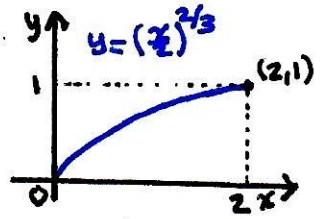
sayısıdır.

Örnek 1: $[0,1]$ aralığında $y=\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2}-1$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$f'(x)=\frac{dy}{dx}=2\sqrt{2}\,x^{1/2}$, $[0,1]$'de sürekli olduğundan eğri düzgün eğridir.

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+(2\sqrt{2}\,x^{1/2})^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+8x}\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+8x)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{13}{6}\text{ br.}$$

Örnek 2: $x=0$'dan $x=2$'ye $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.



$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$, $x=0$'da tanımlı değildir. Eğrinin uzunluğunu bu türevle hesaplayamayız.

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \Rightarrow y^{3/2}=\frac{x}{2} \Rightarrow x=2y^{3/2}.$$

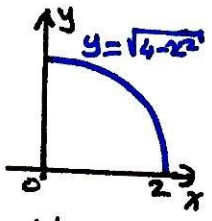
$y=(\frac{x}{2})^{2/3}$ eğrisinin 0'dan 2'ye yay uzunluğu, $x=2y^{3/2}$ eğrisinin 0'dan 1'e olan yay uzunluğu ile aynıdır.

$\frac{dx}{dy}=3y^{1/2}$ birinci türevi süreklidir. Eğrinin uzunluğu

$$L=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_0^1\sqrt{1+9y}\,dy=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1+9y)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2}{27}(10\sqrt{10}-1)\text{ br.}$$

dir.

Örnek3: Uzunluk formülünü kullanarak, $x^2+y^2=4$ çemberinin çevresinin 4π olduğunu gösteriniz.



Çemberin dörtte biri $y=\sqrt{4-x^2}$, $0\le x<2$ dir. Onun uzunluğu

$$L=\int_0^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx \quad , \quad y'=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

dir.

$x=2$'de y' tanımlı olmadığından integral genelleştirilmiş integraldir.

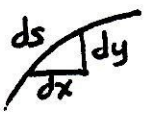
$$L=\int_0^2\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx=\int_0^2\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx=\lim_{b\to 2^-}\int_0^b\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx\quad\begin{bmatrix}x=2\sin t\\ dx=2\cos t\,dt\end{bmatrix}$$

$$=\lim_{b\to 2^-}2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^b=\lim_{b\to 2^-}2\sin^{-1}\frac{b}{2}=\pi\text{ br.}$$

Çemberin çevresi 4π dir.

Kısa Diferansiyel Formülü: $L=\int_0^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, $L=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$ formüllerini türevler yerine diferansiyeller ile yazabiliriz.

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx=\sqrt{dx^2+\frac{dy^2}{dx^2}dx^2}=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$



$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ yay uzunluğu diferansiyeli, $L=\int ds$ yay uzunluğunun diferansiyel formülü.